Correction du devoir maison $n°1$

Exercice 1: La négation est "$\exists n \in \mathbb{N}, (4|n \text{ et } 6|n)$ et $24 \not| n$". Posons $n = 12$. On a $(4|n \text{ et } 6|n)$ et $24 \not| n$. On a prouvé que la proposition "$\forall n \in \mathbb{N},\ (4|n \text{ et } 6|n) \Rightarrow 24|n$." est fausse en prouvant sa négation.

Exercice 2:

On va le démontrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$: "$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$".

- Initialisation : $1^2 = 1$ et $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ donc $P(1)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ soit vraie.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 &\underset{\text{HDR}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right] = \frac{(n+1)(2n^2+6n+7)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 3: On raisonne par analyse-synthèse.
Soit f une fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$.

- Analyse : Supposons qu'il existe une fonction affine $g : x \mapsto ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et une fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $h(0) = h'(0) = 0$ de sorte que $f = g + h$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = k + h(x)$.
  En dérivant et en évaluant en 0, on obtient : $f'(0) = g'(0) + h'(0) = a$.
  En évaluant en 0, on obtient : $f(0) = g(0) + h(0) = b$.
  Donc $g : x \mapsto f'(0)x + f(0)$ et $h : x \mapsto f(x) - f'(0)x - f(0)$.
- Synthèse : Posons $g : x \mapsto f'(0)x + f(0)$ et $h : x \mapsto f(x) - f'(0)x - f(0)$.
  La fonction g est bien affine, la fonction h est bien dérivable et vérifie $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$.
  De plus, $g + h = f$.

Conclusion : toute fonction dérivable définie sur $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme la somme d'une fonction affine et d'une fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $h(0) = h'(0) = 0$.

Exercice 4:
Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
Raisonnons par contraposée, supposons que $x < 4$ et $y < 3$, alors $x + y < 7$.
Par contraposé, on a montré que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $(x + y \geq 7) \implies (x \geq 4 \text{ ou } y \geq 3)$.

Exercice 5: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$: "$u_n = 1$".
Démontrons par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

- Initialisation : $u_0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(k)$ soit vraie pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(u_0 + \cdots + u_n) = \frac{1}{n+1}\underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{n+1 \text{ termes}} = \frac{n+1}{n+1} = 1$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.